Exercice 1 : .... 4 points

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$.

1. a. Démontrons que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera

Posons : $z = iy$; $y \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} iy \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (iy)^3 + (1-8i)(iy)^2 - (23+4i)(iy) - 3 + 24i = 0 \\ &\Leftrightarrow -iy^3 + (1-8i)(-y^2) - (23+4i)(iy) - 3 + 24i = 0 \\ &\Leftrightarrow -y^2 + 4y - 3 + i(-y^3 + 8y^2 - 23y + 24) = 0 \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} -y^2 + 4y - 3 = 0 & (1) \\ -y^3 + 8y^2 - 23y + 24 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolvons (1) :

$-y^2 + 4y - 3 = 0$

$-1 + 4 - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ et $y_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-3}{-1} = 3.$

Vérifions (2) pour $y = 1$

$-1 + 8 - 23 + 24 = 8 \neq 0$

Vérifions (2) pour $y = 3$

$-(3)^3 + 8(3)^2 - 23(3) + 24 \overset{?}{=} 0 \Leftrightarrow -27 + 72 - 69 + 24 \overset{?}{=} 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ vraie alors $z = 3i$

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$z = 3i$ est une solution de (E) donc on peut factoriser (E) par $(z - 3i)$

Méthode 1 : Par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i & z - 3i \\ \cline{2-2} -z^3 + 3iz^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & z^2 + (1-5i)z - 8 - i \\ \cline{1-1} (1-5i)z^2 - (23+4i)z \qquad\quad & \\ -(1-5i)z^2 + (15+3i)z \qquad\quad & \\ \cline{1-1} (-8-i)z - 3 + 24i & \\ -(-8-i)z + 3 - 24i & \\ \cline{1-1} 0 \quad + \quad 0 & \end{array}$$

$(E) \Leftrightarrow (z - 3i)\left(z^2 + (1-5i)z - 8 - i\right) = 0$

Méthode 2 : Par les coefficients indéterminés.

$z = 3i$ est une solution de (E) signifie que :

$z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$ où $a \in \mathbb{C}^*$, b *et* $c \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (z-3i)(az^2 + bz + c) &= z(az^2 + bz + c) - 3i(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + (b - 3ia)z^2 + (c - 3ib)z - 3ic \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3ia=1-8i \\ c-3ib=-23-4i \\ -3ic=-3+24i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1-5i \\ c=-23-4i+3i+15 \\ c=-i-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1-5i \\ c=-8-i \end{cases}$$

D'où $z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=(z-3i)\left(z^2+(1-5i)z-8-i\right)$

Méthode 3 : Par le tableau d'Hörner

$z=3i$ est une solution de (E). On a :

$z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=(z-3i)\left(az^2+bz+c\right)$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$

	1	$1-8i$	$-23-4i$	$-3+24i$
$3i$	$\downarrow$	$3i$	$15+3i$	$3-24i$
	1	$1-5i$	$-8-i$	0

Alors $a=1$; $b=1-5i$ et $c=-8-i$

D'où $z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=(z-3i)\left(z^2+(1-5i)z-8-i\right)$

Résolvons l'équation $z^2+(1-5i)z-8-i=0$.

$z^2+(1-5i)z-8-i=0$

$\Delta=(1-5i)^2-4(-8-i)=1-25-10i+32+4i=8-6i$

Déterminons les racines carrées de Δ :

Méthode 1 :

Soit $\delta=a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ tel que $\delta^2=\Delta$. Par identification on a le système :

$$\begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{8^2+6^2} \\ a^2-b^2=8 \\ \quad 2ab=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=10 & (1) \\ a^2-b^2=8 & (2) \\ \quad 2ab=-6 & (3) \end{cases}$$

Résolution du système :

$(1)+(2) \Rightarrow 2a^2=18 \Rightarrow a=-3$ ou $a=3$

Dans (3) pour $a=-3$; $b=1$ ou pour $a=3$; $b=-1$ et on a : $\delta_1=3-i$ et $\delta_2=-3+i$.

Méthode 2 :

Soient δ_1 et δ_2 les racines carrées de Δ ; $|\Delta|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$; $Re(\Delta)=8$ et $Im(\Delta)=-6<0$ alors :

$$\delta_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(|\Delta|+Re(\Delta)\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(|\Delta|-Re(\Delta)\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}(10+8)}-i\sqrt{\frac{1}{2}(10-8)}=3-i$$

$\delta_2=-\delta_1=-3+i$.

Les solutions de cette équation :

$$z_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{-(1-5i)+3-i}{2}=1+2i$$

$$z_2=\frac{-b+\delta_2}{2a}=\frac{-(1-5i)-3+i}{2}=-2+3i.$$

L'ensemble solution de (E) est : $S=\{3i\ ;\ -2+3i\ ; 1+2i\}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B

et C d'affixes respectives $1+2i$; $3i$ et $-2+3i$.
$G = bar\{(A,2)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,1)\}$.

a. Déterminons puis écrivons sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$:

Déterminons :

$$Z_G = \frac{2Z_A - 2Z_B + Z_C}{2-2+1} = 2(1+2i) - 2(3i) - 2 + 3i = 2 + 4i - 6i - 2 + 3i = i$$

$$Z_{\overrightarrow{GA}} = Z_A - Z_G = 1 + 2i - i = 1 + i$$

$$Z_{\overrightarrow{GB}} = Z_B - Z_G = 3i - i = 2i$$

$$Z_{\overrightarrow{GC}} = Z_C - Z_G = -2 + 3i - i = -2 + 2i.$$

Leur forme trigonométrique :

$$Z_{\overrightarrow{GA}} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$Z_{\overrightarrow{GB}} = 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$Z_{\overrightarrow{GC}} = -2 + 2i = 2(-1+i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

b. Démontrons que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont les termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

Méthode 1 :

Vérifions si $Z_{\overrightarrow{GA}}, Z_{\overrightarrow{GB}}, Z_{\overrightarrow{GC}}$ sont en progression géomètrique :

$Z^2_{\overrightarrow{GB}} = (2i)^2 = -4$; $Z_{\overrightarrow{GA}} \times Z_{\overrightarrow{GC}} = (1+i)(-2+2i) = -2(1+i)(1-i) = -4$

$Z^2_{\overrightarrow{GB}} = Z_{\overrightarrow{GA}} \times Z_{\overrightarrow{GC}} = -4$ alors $Z_{\overrightarrow{GA}}$, $Z_{\overrightarrow{GB}}$ et $Z_{\overrightarrow{GC}}$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = \dfrac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GA}}} = \dfrac{2i}{1+i} = i(1-i) = 1+i$

$q = 1 + i$.

Méthode 2 :

$Z_{\overrightarrow{GA}}, Z_{\overrightarrow{GB}}, Z_{\overrightarrow{GC}}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre si et seulement si $\dfrac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GA}}} = \dfrac{Z_{\overrightarrow{GC}}}{Z_{\overrightarrow{GB}}} = q$ à vérifier :

$$\frac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GA}}} = \frac{2i}{1+i} = i(1-i) = 1+i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{GC}}}{Z_{\overrightarrow{GB}}}=\frac{-2+2i}{2i}=-i(-1+i)=i+1=1+i$$

$\frac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GA}}}=\frac{Z_{\overrightarrow{GC}}}{Z_{\overrightarrow{GB}}}=q=1+i$. D'où $Z_{\overrightarrow{GA}}$, $Z_{\overrightarrow{GB}}$, $Z_{\overrightarrow{GC}}$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q=1+i$

Méthode 3

$Z_{\overrightarrow{GC}}$, $Z_{\overrightarrow{GB}}$, $Z_{\overrightarrow{GA}}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre si et seulement si $\frac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GC}}}=\frac{Z_{\overrightarrow{GA}}}{Z_{\overrightarrow{GB}}}=q$ à vérifier

$\frac{Z_{\overrightarrow{GB}}}{Z_{\overrightarrow{GC}}}=\frac{-2i}{-2+2i}=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{2}=\frac{1}{2}(1-i)$ d'où $Z_{\overrightarrow{GB}}=\frac{1-i}{2}Z_{\overrightarrow{GC}}$

$\frac{Z_{\overrightarrow{GA}}}{Z_{\overrightarrow{GB}}}=\frac{1+i}{2i}=\frac{-i(1+i)}{2i}=\frac{1}{2}(1-i)$ d'où $Z_{\overrightarrow{GA}}=\frac{1-i}{2}Z_{\overrightarrow{GB}}$

Alors $Z_{\overrightarrow{GC}}$, $Z_{\overrightarrow{GB}}$, $Z_{\overrightarrow{GA}}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q=\frac{1-i}{2}$ et de premier terme $Z_{\overrightarrow{GC}}$.

c. Déduisons-en qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.

(1) Pour le cas ou $q=1+i$

Méthode 1

D'après la question précédente :

$$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{GB}}=(1+i)Z_{\overrightarrow{GA}}\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{GB}}=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}Z_{\overrightarrow{GA}} \\ Z_{\overrightarrow{GC}}=(1+i)Z_{\overrightarrow{GB}}\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{GC}}=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}Z_{\overrightarrow{GB}} \end{cases} \Longrightarrow \text{il existe la similitude directe notée } S.$$

Déterminons les éléments caractéristiques de S :

le centre est le point G d'affixe $Z_G=i$,

le rapport est $k=\sqrt{2}$

l'angle est $\theta=\frac{\pi}{4}$

Méthode 2

Soit S cette similitude. Vérifions si sa forme complexe est : $Z'=aZ+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$.

$$Z_{\overrightarrow{GB}}=(1+i)Z_{\overrightarrow{GA}}\Leftrightarrow Z_B-Z_G=(1+i)(Z_A-Z_G)$$

$$\Leftrightarrow Z_B=(1+i)Z_A-(1+i)Z_G+Z_G$$

$$\Leftrightarrow Z_B = (1+i)Z_A - iZ_G$$
$$\Leftrightarrow Z_B = (1+i)Z_A + 1$$
$$Z_{\overrightarrow{GC}} = (1+i)Z_{\overrightarrow{GB}} \Leftrightarrow Z_C - Z_G = (1+i)(Z_B - Z_G)$$
$$\Leftrightarrow Z_C = (1+i)Z_B - (1+i)Z_G + Z_G$$
$$\Leftrightarrow Z_C = (1+i)Z_B - iZ_G$$
$$\Leftrightarrow Z_C = (1+i)Z_B + 1$$

Alors $a = 1+i$; $b = 1$ et $Z' = (1+i)Z + 1$ est la forme complexe d'une similitude directe notée S.

Déterminons les éléments caractéristiques de S :

le centre est G d'affixe $:Z_G = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{-i} = i.$

le rapport est : $k = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle est : $\theta = Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

(2) Pour le cas ou $q = \frac{1-i}{2}$

Méthode 1

D'après la question précédente :

$$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{GB}} = \frac{1-i}{2} Z_{\overrightarrow{GC}} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{GB}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} Z_{\overrightarrow{GC}} \\ Z_{\overrightarrow{GA}} = \frac{1-i}{2} Z_{\overrightarrow{GB}} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{GA}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} Z_{\overrightarrow{GB}} \end{cases} \Longrightarrow \text{il existe la similitude directe notée } S.$$

Déterminons les éléments caractéristiques de S :

le centre est le point G d'affixe $Z_G = i$,

le rapport est $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

l'angle est $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Méthode 2

Soit S cette similitude. Vérifions si sa forme complexe est : $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

$$Z_{\overrightarrow{GB}} = \frac{1-i}{2} Z_{\overrightarrow{GC}} \Leftrightarrow Z_B - Z_G = \frac{1-i}{2}(Z_C - Z_G)$$
$$\Leftrightarrow Z_B = \frac{1-i}{2} Z_C - \frac{1-i}{2} Z_G + Z_G$$
$$\Leftrightarrow Z_B = \frac{1-i}{2} Z_C + \frac{1+i}{2} Z_G$$
$$\Leftrightarrow Z_B = \frac{1-i}{2} Z_C - \frac{1-i}{2}$$
$$Z_{\overrightarrow{GA}} = \frac{1-i}{2} Z_{\overrightarrow{GB}} \Leftrightarrow Z_A - Z_G = \frac{1-i}{2}(Z_B - Z_G)$$

$$\Leftrightarrow Z_A = \frac{1-i}{2} Z_B - \frac{1-i}{2} Z_G + Z_G$$

$$\Leftrightarrow Z_C = \frac{1-i}{2} Z_B + \frac{1+i}{2} Z_G$$

$$\Leftrightarrow Z_C = \frac{1-i}{2} Z_B - \frac{1-i}{2}$$

Alors $a = \frac{1-i}{2}$; $b = -\frac{1-i}{2}$ et $Z' = \frac{1-i}{2} Z - \frac{1-i}{2}$ est la forme complexe d'une similitude directe notée S.

Déterminons les éléments caractéristiques de S :

le centre est G d'affixe $:Z_G = \dfrac{-\frac{1-i}{2}}{1-\frac{1-i}{2}} = \dfrac{-1+i}{1+i} \dfrac{i(1+i)}{1+i} = i.$

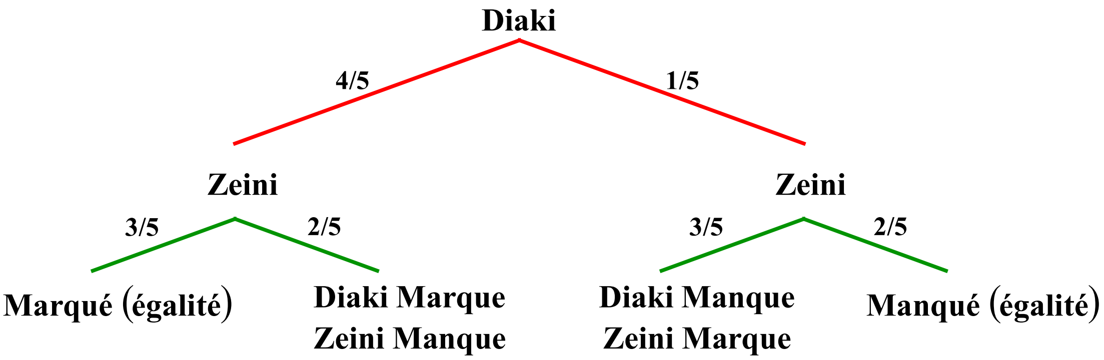
le rapport est : $k = \left| \frac{1-i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

l'angle est : $\theta = Arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 2 : .... 7 points✍

I. Diaki et Zeini, deux fameux amateurs de football, s'amusent aux tirs au but. Diaki est décidément très fort : quand il tire au but face à Zeini, il marque toujours 4 fois sur 5. En face, Zeini marque 3 fois sur 5 invariablement.

1. Représentatons au moyen d'un arbre pondéré les différentes eventualités d'une phase.



Calculons les probabilités des événements suivants :

a. Les joueurs sont ex-aequo (ils ont tous deux marqué ou tous deux manqué) .
Soit P cette probabilité :

$$P = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25} + \frac{2}{25} = \frac{14}{25}$$

b. Diaki gagne (Diaki marque, Zeini manque) :
Soit P_1 cette probabilité :

$$P_1 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

c. Zeini gagne (Diaki manque, Zeini marque) :
Soit P_2 cette probabilité :

$P_2 = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}.$

2. Au bout de deux phases, le perdant éventuel donne 10 Francs au gagnant. En cas d'égalité, aucune somme d'argent n'est échangée.

Méthode 1

L'espérance de gain de Zeini :

Après les deux phases independantes, on a :

- Zeini gagne globalement $(\text{gain} : +10)$:
  - Zeini gagne les deux phases : la probabilité est : $\left(\frac{3}{25}\right)^2 = \frac{9}{625}$
  - Zeini gagne l'une des phases : la probabilité est : $2 \times \frac{3}{25} \times \frac{14}{25} = \frac{84}{625}$
- Diaki gagne globalement ce qui engendre la perte de Zeini$(\text{gain}: -10)$:
  - Diaki gagne les deux phases : la probabilité est : $\left(\frac{8}{25}\right)^2 = \frac{64}{625}$
  - Diaki gagne l'une des phases : la probabilité est : $2 \times \frac{8}{25} \times \frac{14}{25} = \frac{224}{625}$
- Égalité $(\text{gain}: 0)$:
  - Les deux phases sont gagnées : la probabilité est : $\left(\frac{14}{25}\right)^2 = \frac{196}{625}$
  - L'une des phases est perdue : la probabilité est : $2 \times \frac{3}{25} \times \frac{8}{25} = \frac{48}{625}$

Calcul de l'espérance de Zeini :

$$E = \left(\frac{9}{625} + \frac{84}{625}\right) \times 10 + \left(\frac{64}{625} + \frac{224}{625}\right) \times (-10) + \left(\frac{196}{625} + \frac{48}{625}\right) \times 0 = -\frac{1950}{625}$$

$E = -3{,}12$ Francs.

Ce qui signifie qu'en moyenne Zeini a peu d'espoir de gagner (***facultative***)

Méthode 2

L' enjeu est de 10 Francs par phase gagnée. Sur deux phases, Zeini peut :

- gagner 0 F (perd ou égalité)
- perdre 10 F
- gagner 10 F
- ou que ce soit ex-aequo sur les deux phases $\longrightarrow$0 F

D'abord, construisons toutes les éventualités sur 2 phases (il y a 3 cas possibles pour chaque phase : D gagne, Z gagne, égalité) , soit 9 combinaisons.

Notons :

- G : Diaki gagne la phase
- P : Zeini gagne la phase
- E : égalité

Cas possibles et leur probabilité

Phase 1	Phase 2	Resultat total	Gain de Zeini	Probabilité
G	G	Diaki gagne	-10	$(8/25)*(8/25) = 64/625$
G	P	Égalité	0	$(8/25)*(3/25) = 24/625$
G	E	Diaki gagne	-10	$(8/25)*(14/25) = 112/625$
P	G	Égalité	0	$(3/25)*(8/25) = 24/625$
P	P	Zeini gagne	$+10$	$(3/25)*(3/25) = 9/625$
P	E	Zeini gagne	$+10$	$(3/25)*(14/25) = 42/625$
E	G	Diaki gagne	-10	$(14/25)*(8/25) = 112/625$
E	P	Zeini gagne	$+10$	$(14/25)*(3/25) = 42/625$
E	E	Égalité	0	$(14/25)*(14/25) = 196/625$

Calcul de l'espérance de gain de Zeini

On fait :

$E = \Sigma$ (gain × probabilité)

- Gains positifs (Zeini gagne) :
  $+10\times(9+42+42))/625 = 10\times 93/625 = 930/625$
- Gains négatifs (Zeini perd) :
  $-10\times(64+112+112)/625 = -10\times 288/625 = -2880/625$
- Égalité : $0\times$ (reste) $= 0$

Espérance totale $= (930-2880)/625 = -1950/625 = -3{,}12$

Conclusion

- Espérance de gain de Zeini = $-3{,}12$ *Francs*

Autrement dit, Zeini perd en moyenne 3,12 Francs à chaque match en deux phases.

Cela confirme que Diaki a l'avantage statistique dans ce jeu.

Méthode 3

Au bout de deux phases :

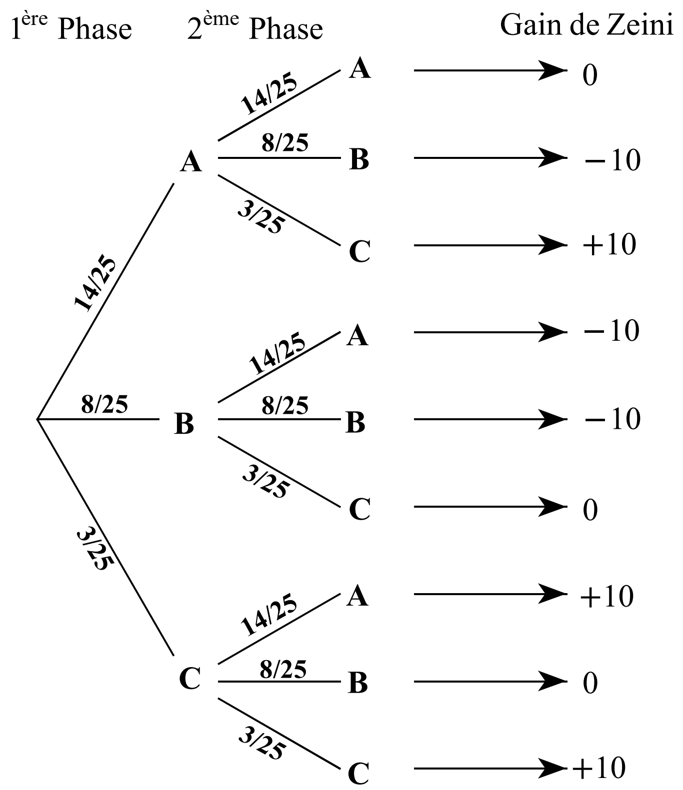
L'esperance mathématique du gain de Zeini

A : ≪ Les joueurs sont ex-aequo ≫ $P(A) = \dfrac{14}{25}$

B: ≪ Diaki gagne ≫ $P(B) = \dfrac{8}{25}$

C : ≪ Zeini gagne ≫ $P(C) = \dfrac{3}{25}$

$X \leadsto$ le gain de Zeini



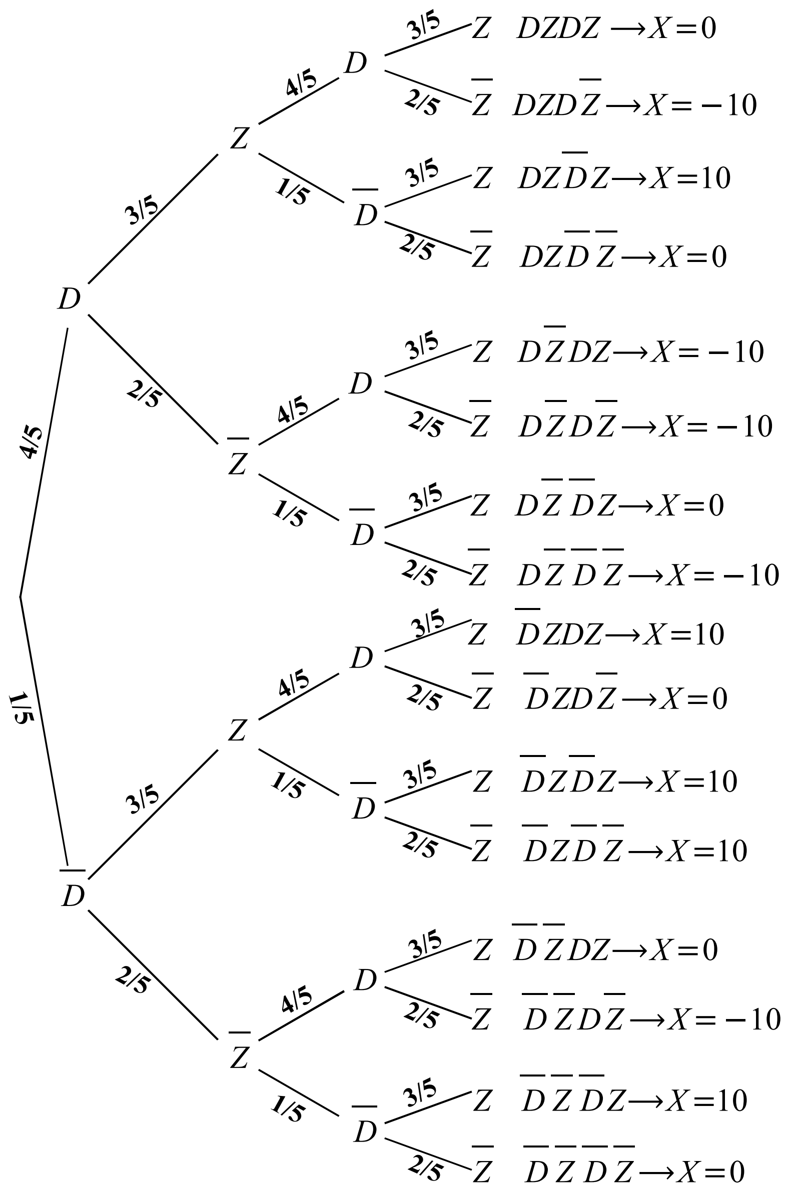
$$P(X=0)=\frac{14^2+2\times 3\times 8}{625}=\frac{244}{625}$$

$$P(X=-10)=\frac{2\times 14\times 8+8^2}{625}=\frac{288}{625}$$

$$P(X=10)=\frac{2\times 14\times 3+3^2}{625}=\frac{93}{625}$$

$$E(X)=-10\times\frac{288}{625}+0\times\frac{244}{625}+10\times\frac{93}{625}=-3{,}12$$

Méthode 4



D'après l'arbre, on a :

$$P(X=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$\times\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{244}{625}$$

$$P(X=-10)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)=$$
$$\frac{288}{625}$$

$$P(X=10)=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{93}{625}$$

$$E(X)=0\times\left(\frac{244}{625}\right)-10\left(\frac{288}{625}\right)+10\left(\frac{93}{625}\right)=-3{,}12.$$

II. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1. Déterminons un couple (α_0, β_0) d'entiers relatifs, solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$.

Déterminons (α_0, β_0) à l'aide du tableau d'algorithme d'euclide :

q	3	3
23	7	2
r	2	1

Posons $a = 23$ et $b = 7$

$2 = 23 - 7 \times 3 \Leftrightarrow a - 3b = 2$

$1 = 7 - 3 \times 2 \Leftrightarrow b - 3 \times 2 = 1$

$b - 3 \times 2 = 1 \;\Leftrightarrow\; b - 3(a - 3b) = 1 \;\Leftrightarrow\; -3a + 10b = 1 \;\Leftrightarrow\; 23(-3) + 7(10) = 1$ D'où $(\alpha_0, \beta_0) = (-3, 10)$

2. Trouvons un couple (u_0, v_0) solution de l'équation (E) : $23u - 7v = -6$

D'après la $1^{ère}$ question on a :

$23(-3) + 7(10) = 1 \Rightarrow 23(-3)(-6) + 7(10)(-6) = -6 \Rightarrow 23(18) - 7(60) = -6$ alors le couple $(u_0, v_0) = (18\ , 60)$.

Résolvons completement l'équation (E).

Méthode 1 : Par Gauss:

On a le système :

$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ 23(18) - 7(60) = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ 23(-18) - 7(-60) = 6 \end{cases}$$

$$23(u - 18) - 7(v - 60) = 0 \Rightarrow 23(u - 18) = 7(v - 60)$$

$23 \wedge 7 = 1$, d'après Gauss $7 \diagup u - 18$ et $23 \diagup v - 60 \Rightarrow \dfrac{u - 18}{7} = \dfrac{v - 60}{23} = k\ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow u - 18 = 7k \text{ et}; v - 60 = 23k$$

D'où $u = 7k + 18$ et $v = 23k + 60$

$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(7k + 18\ ;\ 23k + 60)\}$ ou $S = \{(7k + 18\ ;\ 23k + 60),\ k \in \mathbb{Z}\}$

Méthode 2 : Par la méthode homogène

L'équation homogène associée à (E) est $23u - 7v = 0$

Soit le couple $(u_1\ , v_1)$ la solution de $23u - 7v = 0$ alors $u_1 = 7k$ et $v_1 = 23k$ $(k \in \mathbb{Z})$ de plus $(u_0, v_0) = (18\ , 60)$ est une solution particulière de (E), par suit la solution générale de (E) est : $u = u_1 + u_0 = 7k + 18$ et $v = v_1 + v_0 = 23k + 60$

$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(7k + 18\ ;\ 23k + 60)\}$ ou $S = \{(7k + 18\ ;\ 23k + 60),\ k \in \mathbb{Z}\}$

Méthode 3 : Par la congruence.

On a (E): $23u - 7v = -6$

$$\begin{aligned} 23u - 7v = -6 \Rightarrow 23u = -6 + 7v &\Rightarrow 23u \equiv -6[7] \\ &\Rightarrow 2u \equiv -6[7] \\ &\Rightarrow u \equiv -3[7] \\ &\Rightarrow u \equiv 4[7] \\ &\Rightarrow u = 4 + 7k\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Remplaçons u par sa valeur dans (E).

$23(4 + 7k) - 7v = -6 \Leftrightarrow 92 + 23 \times 7k - 7v = -6$

$$\Leftrightarrow -7v = -23 \times 7k + 98$$
$$\Longrightarrow v = 23k + 14$$

$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(7k+4\ ;\ 23k+14)\}$ ou $S = \{(7k+4\ ;\ 23k+14),\ k \in \mathbb{Z}\}$

3. Démontrons que x est solution de l'équation (S) si et seulement s'il existe un couple $(u\ ,\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$.

   x est solution du système $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 10[23]\ (1) \\ x \equiv 4[7] \quad (2) \end{cases}$.

   $x \equiv 10[23] \Leftrightarrow x = 10 + 23u,\ u \in \mathbb{Z}.\ (3)$

   En substituant dans (2)

   $10 + 23u \equiv 4[7] \Leftrightarrow 23u \equiv -6[7] \Leftrightarrow 23u = -6 + 7v\ (v \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 23u - 7v = -6\ (4)$.

   D'après (3) et (4) on a : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

   Déduisons l'ensemble des solutions de (S).

   D'après 2°) $u = 7k + 18$.

   Remplaçons u par sa valeur dans x :

   $x = 10 + 23(7k + 18) = 161k + 424$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{161k + 424\}$ ou $S = \{161k + 424\}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

4. Déterminons la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

   $x \equiv 0[16] \Leftrightarrow 161k + 424 \equiv 0[16] \Leftrightarrow 161k \equiv -424[16] \Leftrightarrow k \equiv 8[16] \Longrightarrow k = 8 + 16p$ $(p \in \mathbb{Z})$.

   $x = 161(16p + 8) + 424 = 2576p + 1288 + 424 = 2576p + 1712$.

   $x = 2576p + 1712$.

   Pour $p = 0$, $x = 1712$ est la plus petite solution de (S) divisible par 16.

Problème : .... 9 points✍

Partie A

1. On considère la fonction numérique de courbe représentative (Cf) définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$

   a. Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{1-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{1-x} = -\infty(+\infty) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

   b. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

   $f'(x) = 1.(e^{1-x}) - e^{1-x}(x) = e^{1-x}(1-x) \Longrightarrow f'(x) = e^{1-x}(1-x)$

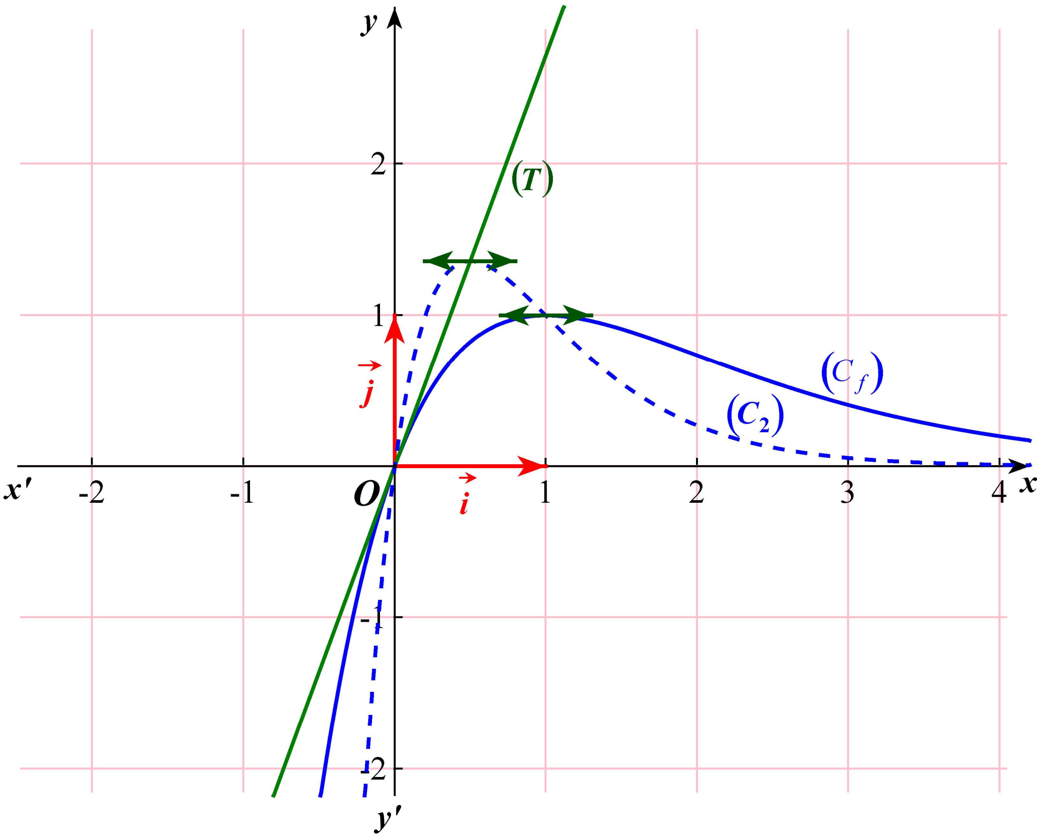
   $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{(1-x)} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$

   $\forall x \in]-\infty; 1];\ f'(x) \geq 0$ alors f est croissante

   $\forall x \in [1; +\infty[;\ f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1 ↘ 0

c. Traçons la courbe (C_f) et la tangente à l'origine. (**voir figure**)
Équation de la tangente à l'origine $(x_0 = 0)$
$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = ex$
Recherche des branches infinies
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction suivant l'axe des ordonnées.
Traçons (C_f) et (T) :



2. On considére la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x| e^{|1-x|}$.
a. Écrivons $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
Signe de (x) et $(1-x)$.
Posons $x = 0$; $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$.
Tableau de signes et des valeurs absolues

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	$-$ 0	$+$	$+$
$\lvert x\rvert$	$-x$ 0	x	x
$1-x$	$+$	$+$ 0	$-$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	$1-x$ 0	$x-1$
$g(x)$	$-xe^{1-x}$	xe^{1-x}	xe^{x-1}

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0] \; ; \; g(x) = -xe^{1-x} \\ \forall x \in [0; 1] \; ; \; g(x) = xe^{1-x} \\ \forall x \in [1; +\infty[; \; g(x) = xe^{x-1} \end{cases}$$

b. Déduisons une méthode pour obtenir la courbe représentative (Cg) de g sur $]-\infty; 1]$ à partir de (C_f).

- Pour tout $x \in]-\infty; 0]$; $f(x) = -g(x)$; donc (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Sur $[0 ; 1]$; $f(x) = g(x)$ donc (C_f) et (C_g) sont confondues.

c. Déduisons sur l'intervalle $[1; +\infty[$, le sens de variation de la fonction h.

$h \longmapsto h(x) = xe^{-1+x}$ puis que sur $[1; +\infty[$, $h(x) = -f(-x)$

$h'(x) = f'(-x) = e^{x-1}(1+x)$.

Donc $\forall x \in [1; +\infty[$; $h'(x) > 0$, alors h est strictement croissante.

d. Étudions la dérivabilité de g en 0 et en 1.

En $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -e^{1-x} = -e = g'_g(0)$. Alors g est dérivable à gauche.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{1-x} = e = g'_d(0)$. Alors g est dérivable à droite.

Puisque $g'_d(0) \neq g'_g(0)$ alors g n'est pas dérivable en 0.

En $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{xe^{1-x} - 1}{x - 1}$$

Posons $X = x - 1 \Rightarrow x = X + 1$.

Si $x \to 1$ alors $X \to 0$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{X \to 0} \frac{(X+1)e^{-X} - 1}{X} = \lim_{X \to 0} \frac{Xe^{-X} + e^{-X} - 1}{X}.$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{X \to 0} \left(e^{-X} - \dfrac{e^{-X} - 1}{-X} \right) = 0 = g'_g(1)$. Alors g est dérivable à gauche en 1.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{xe^{x-1}-1}{x-1}$$

Posons $X = x-1 \Rightarrow x = X+1$.

Si $x \to 1$ alors $X \to 0$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{(X+1)e^X-1}{X}=\lim_{X\to 0}\frac{Xe^X+e^X-1}{X}$$

$$\lim_{X\to 0}\frac{Xe^X+e^X-1}{X}=\lim_{X\to 0}\left(e^X+\frac{e^X-1}{X}\right)=1+1=2$$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=2=g'_d(1)$ Alors g est dérivable à droite en 1.

Puisque $g'_d(1)\neq g'_g(1)$ alors g n'est pas dérivable en 1.

e. Déduisons des questions précédentes le tableau de variations de g.

D'après 2) b°) et 2) c°) : $\forall x\in]-\infty;0]$; $f(x)=-g(x)$ donc g est strictement décroissante et de plus $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} -f(x)=+\infty$

Pour tour $x\in[0;1]$; $f(x)=g(x)$ alors g est strictement croissante.

Pour tout $x\in[1;+\infty[$; $g(x)=h(x)$ alors g est strictement croissante.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	**1**	↗	$+\infty$

f. Trace (C_g) ainsi que les demi-tangentes à (C_g) aux points d'abscisse 0 et 1.

Déterminons les équations des demi-tangentes :

En $x_0 = 0$

(T_1) : $y=g'_g(0)(x-0)+g(0)\Rightarrow(T_1)$: $y=-ex$

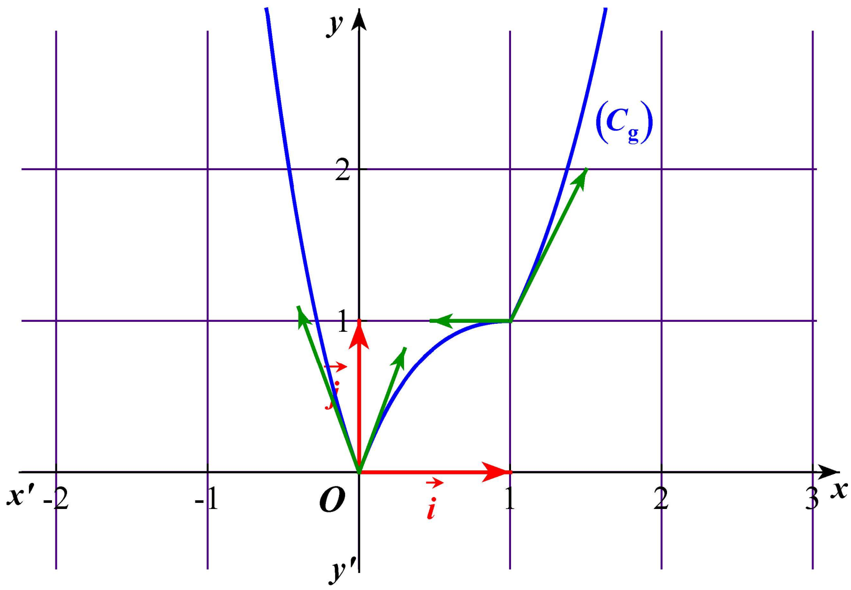
(T_2) : $y=g'_d(0)(x-0)+g(0)\Rightarrow(T_2)$: $y=ex$

En $x_0 = 1$

(T_3) : $y=g'_g(1)(x-1)+g(1)\Rightarrow(T_3)$: $y=1$

(T_4) : $y=g'_d(1)(x-1)+g(1)\Rightarrow(T_4)$: $y=2x-1$.

Les traces :



Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$, on note (C_n) la courbe représentative de f_n.

1. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$ puis donnons une interpretation graphique

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{n(1-x)} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{n(1-x)} = +\infty$ alors à la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction suivant l'axe des ordonnées au visinage de $-\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{n(1-x)} = 0$Alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$.

2. On admet que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Calculons la fonction dérivée f_n' de f_n

   $f_n(x) = xe^{n(1-x)} \Longrightarrow f_n'(x) = 1.e^{n(1-x)} - n.e^{n(1-x)}(x) = e^{n(1-x)}(1-nx).$

   $f_n'(x) = e^{n(1-x)}(1-nx)$

   b. Étudions le signe de $f_n'(x)$ puis dressons le tableau de variations de f_n.

   Dérivée et son signe.

   $f_n'(x) = e^{n(1-x)}(1-nx)$

   $\forall x \in \mathbb{R}, e^{n(1-x)} > 0$, donc le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(1-nx)$

   Posons $1 - nx = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{n}$

   $\forall x \in \left]\dfrac{1}{n}; +\infty\right[; f_n'(x) < 0$

   $\forall x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{n}\right[; f_n'(x) > 0$

   Pour $x = \dfrac{1}{n}$; $f_n'\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{n}e^{n-1}$	$\searrow$	0

c. Résolvons dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = 0$

$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{n(1-x)} = 0;\ e^{n(1-x)} \neq 0$

$\Rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

d. Déduisons que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.

$f_n(x) = f_{n+1}(x) \Leftrightarrow xe^{n(1-x)} = xe^{(n+1)(1-x)}$

$\Leftrightarrow xe^{n(1-x)} - xe^{(n+1)(1-x)} = 0$

$\Leftrightarrow xe^{n(1-x)}\left(1 - e^{(1-x)}\right) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad ou \quad 1 - e^{(1-x)} = 0 \Rightarrow e^{(1-x)} = 1$

$\Rightarrow x = 1$

Les courbes (C_n) passent par deux points fixes : $A(0\ ;0)$ et $B(1\ ;1)$

4. Étudions la position de (C_n) par rapport à (C_{n+1}).

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = xe^{(n+1)(1-x)} - xe^{n(1-x)} = xe^{n(1-x)}[e^{(1-x)} - 1]$

Tableau de signe de $(f_{n+1}(x) - f_n(x))$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{1-x} - 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; (C_{n+1}) est en dessous de (C_n)

$\forall x \in]0; 1[$; (C_{n+1}) est au dessus de (C_n)

pour $x = 0$ et $x = 1$; (C_{n+1}) et (C_n) sont confondues

5. Traçons (C_2) (voir la figure de $f = f_1$)

6. α étant un nombre réel, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} f_n(x)dx$.

a. Calculons $I_n(\alpha)$

Posons : $u = x \Longrightarrow u' = 1$

$$v' = e^{n-nx} \Longrightarrow v = -\frac{1}{n}e^{n-nx}$$

$$I_n(\alpha) = \left[\frac{-x}{n}e^{n-nx}\right]_0^{\alpha} + \frac{1}{n}\int_0^{\alpha} e^{n-nx}dx = -\frac{\alpha}{n}e^{n-n\alpha} + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{n-nx}\right]_0^{\alpha}$$

$$I_n(\alpha) = -\frac{\alpha}{n}e^{n(1-\alpha)} - \frac{1}{n^2}e^{n(1-\alpha)} + \frac{1}{n^2}e^{n}$$

b. Calculons la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

$$\lim_{\alpha \to +\infty} I_n(\alpha) = \frac{1}{n^2}e^{n}$$